**GRAVITACIÓN Y COSMOLOGÍA.**
**Examen Convocatoria de Mayo [21/5/2024]**

---

**1.** Describe brevemente y asigna tiempos, *redshifts*, $a(t_0)/a(t)$ y temperaturas (fotones y neutrinos) a tres eventos en la historia del universo desde $z = 2000$ hasta hoy.
(2 puntos)

---

**2.** Usando el telescopio James Webb (JWST) se detectó en 2023 una de las galaxias más distantes conocidas (código JADES-GS-z13-0) con un *redshift* de $z = 13.20$. Sus coordenadas ecuatoriales (J2000) son $\alpha = 53.149880°$ y $\delta = -27.776500°$ y su magnitud aparente es $m = 29.4$.

- Calcula hace cuanto tiempo fue emitida la luz de la citada galaxia (en millones de años).
- Establece una cota superior a la edad de la galaxia cuando ésta emitió la luz que hoy detectamos (en millones de años).
- Calcula su distancia-luminosidad (en Mpc).
- Calcula $M$.
- Calcula su distancia propia (en Mpc).

Nota: Justifica todos los cálculos y en caso necesario añadir a la discusión la función del notebook (Sage) de Cosmología con los correspondientes argumentos y su resultado numéricos con las unidades adecuadas.
Referencia: B. E. Robertson et al., *Identification and properties of intense star-forming galaxies at redshifts* $z > 10$, Nature Astronomy 7, 611–621 (2023).
(2 puntos)

---

**3.** Calcula el tiempo necesario para que el universo se enfrie desde las siguientes condiciones:

- De $T = 3.5 \times 10^{13}$ K a $T = 2.5 \times 10^{13}$ K. ¿Cuáles serían las temperaturas de los neutrinos, en estos dos instantes?
- De $z = 2$ a $z = 1$. ¿Cuáles serían las temperaturas de los neutrinos, en estos dos instantes?

Nota: Justifica todos los cálculos y en caso necesario añadir a la discusión la función del notebook (Sage) de Cosmología con los correspondientes argumentos y su resultado numéricos con las unidades adecuadas. (1 punto)

---

**4.** Considera el siguiente espacio-tiempo bidimensional:

$$ds^2 = -e^{-f(x)}dt^2 + e^{h(x)}dx^2 \,.$$

- Calcula las ecuaciones de las geodésicas en función de $s$ y los símbolos de Christoffel.

  Nota. Este apartado hay que resolverlo usando el método lagrangiano.

- Calcula un vector de Killing y comprueba explícitamente que satisface $\xi_{(\alpha;\beta)} = 0$.

- Expresa la base ortonormal asociada a esta métrica $\{\boldsymbol{e}_{\hat{t}}, \boldsymbol{e}_{\hat{x}}\}$ en función de la base coordenada $\{\boldsymbol{e}_t, \boldsymbol{e}_x\}$ original. Calcula las siguientes cantidades: $R^{tt}$, $R^{tx}$, $R_{\hat{t}\hat{x}}$, $R_{\hat{x}\hat{x}}$ y $R_{\hat{t}\hat{t}}$.

- ¿Es plano este espacio? Justifica la respuesta.

- Asumiendo que $f(x) = h(x)$, calcula $h(x)$ para que este espacio-tiempo sea plano.

Ayuda: En Sage, una función genérica, por ejemplo $f(x)$, se define mediante el comando `function('f')(x)`.

(2.5 puntos)

---

**5.** Considera el espacio de de Sitter en coordenadas estáticas:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{\Lambda r^2}{3}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{\Lambda r^2}{3}} + r^2 d\Omega_2^2 \,.$$

con $\Lambda > 0$.

- Calcula el tensor de energía-momento correspondiente si la métrica anterior satisface la ecuación de Einstein con constante cosmológica ($\Lambda$).

- Caracteriza el horizonte de sucesos. Asume para ello que la coordenada $r$ es constante en el horizonte.

- Calcula la gravedad superficial en el horizonte.

- Usando análisis dimensional, estima la temperatura del horizonte (conocida como temperatura de Gibbons-Hawking).

(2.5 puntos)

---

Algunos datos.
$h = 0.674$, $T_{\gamma,0} = 2.7255$ K, $\Omega_M = 0.315$, $\Omega_\Lambda = 0.685$ y $\Omega_R \simeq 0$.