GRAVITACIÓN Y COSMOLOGÍA.
Examen Convocatoria de Mayo [2/6/2023]

---

1. Describe brevemente y asigna tiempos, *redshifts*, $a(t_0)/a(t)$ y temperaturas (fotones y neutrinos) a tres eventos en la historia del universo desde que la temperatura fue de $T = 10^{11}$ K hasta hoy.
(2 puntos)

---

2. Supongamos un universo constituido por una sola componente cuya ecuación de estado se escribe como $p = \omega\rho$ y que satisface la condición de energía fuerte $1 + 3\omega > 0$. Demuestra que este universo ha tenido un Big Bang.
(1.5 punto)

---

3. Calcula el tiempo necesario para que el universo se enfrie desde las siguientes condiciones:

- De $T = 5 \times 10^{11}$ K a $T = 10^{11}$ K. ¿Cuáles serían las temperaturas de los neutrinos, en estos dos instantes?
- De $z = 100$ a $z = 10$. ¿Cuáles serían las temperaturas de los neutrinos, en estos dos instantes?

Algunos datos. $h = 0.674$, $T_{\gamma,0} = 2.7255$ K, $\Omega_M = 0.315$, $\Omega_\Lambda = 0.685$ y $\Omega_R \simeq 0$.
(1.5 puntos)

---

4. Considera la siguiente métrica bidimensional:

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}{x}\,.$$

- Calcula las ecuaciones de las geodésicas en función de s y los símbolos de Christoffel.

  Nota. Este apartado hay que resolverlo usando el método lagrangiano.

- Calcula un vector de Killing y comprueba explícitamente que satisface $\xi_{(i;j)} = 0$.

- Expresa la base ortonormal asociada a esta métrica $\{\boldsymbol{e}_{\hat{x}}, \boldsymbol{e}_{\hat{y}}\}$ en función de la base coordenada $\{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y\}$ original. Calcula las siguientes cantidades: R^{xx}, R^{xy}, $R_{\hat{x}\hat{y}}$, $R_{\hat{y}\hat{y}}$ y $R_{\hat{x}\hat{x}}$.

- ¿Cuál es el escalar de curvatura de este espacio?

- ¿Es plano este espacio? Justifica la respuesta.

(2.5 puntos)

---

5. Alicia y Roberto son dos intrépidos físicos-astronautas que están en reposo (ayudados por cohetes) con coordenadas radiales r_A y r_R respectivamente (las angulares son las mismas para los dos físicos), en la vecindad de Gargantúa-II (un agujero negro de tipo Schwarzschild con masa M).

Se conoce que $r_A > r_R > 2M$ y sean τ_A y τ_R los tiempos propios de Alicia y Roberto respectivamente.

Supongamos que Roberto envía repetidamente señales a Alicia con periodo $\Delta\tau_R$. Calcula el periodo con el que Alicia recibe las señales en función de r_A, r_R, $\Delta\tau_R$ y M.

(1 punto)

---

6. La métrica de un agujero negro de Reissner-Nordstrøm con masa M y carga Q es

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)\mathrm{d}t^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega^2\,,$$

- Calcula los dos horizontes que presenta este espacio-tiempo. ¿Cuál es el mayor valor del cociente $|Q|/M$ para el cual este horizonte existe? Un agujero negro que satura este límite se denomina *extremal*. (0.5 puntos)

- Demuestra que la órbita estable circular de menor radio (ISCO) de un agujero extremal de Reissner-Nordstrøm es $r = 4M$. (1 punto)

(1.5 puntos)