GRAVITACIÓN Y COSMOLOGÍA.
Examen Convocatoria de Mayo [31/5/2019]

---

1. Describir brevemente y asignar tiempos, *redshifts*, $a(t_0)/a(t)$ y temperaturas (fotones y neutrinos) a cuatro eventos en la historia del universo desde que la temperatura fue de $T = 500$ GeV hasta que alcanzó $T = 1000$ K.
(2 puntos)

---

2. Calcular (en el Sistema Internacional de unidades):

- El tiempo necesario para que la temperatura del Universo (temperatura de los fotones) pase de: $T_i = 4 \times 10^{11}$ K a $T_f = 8 \times 10^{10}$ K.
- La densidad de energía y el número de partículas por unidad de volumen de la radiación a $T = T_i$.

Justificar la respuesta.
(2 puntos)

---

3. Demostrar

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(1 - \Omega(t)\right) = -2\frac{\ddot{a}}{\dot{a}}\left(1 - \Omega(t)\right) ,$$

donde

$$\Omega(t) \equiv \Omega_M(t) + \Omega_R(t) + \Omega_\Lambda(t) ,$$

$$\Omega_i \equiv \frac{\rho_i(t)}{\rho_c(t)} , \; i = R, M, \Lambda ,$$

$$\rho_c(t) \equiv \frac{3H^2(t)}{8\pi G} .$$

Nota: $\dot{a} = \mathrm{d}a/\mathrm{d}t$.
(1 punto)

---

4. Considérese la siguiente métrica:

$$\mathrm{d}s^2 = -v(x^2)(\mathrm{d}x^1)^2 + 2\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2 + (x^2)^2\left((\mathrm{d}x^3)^2 + (\mathrm{d}x^4)^2\right) .$$

Calcular:

1. Tres vectores de Killing y sus cantidades conservadas asociadas.
2. Las ecuaciones de las geodésicas.
3. Los símbolos de Christoffel.
4. Calcular la cuadrivelocidad de un observador $\boldsymbol{u}$ que tiene las siguientes coordenadas constantes: x^2, x^3 y x^4.
5. Calcular el módulo de la cuadriaceleración $a = \sqrt{a_\mu a^\mu}$, donde $a^\mu \equiv u^\nu \nabla_\nu u^\mu$, para el $\boldsymbol{u}$ que ha sido calculado en el apartado anterior.

(3 puntos)

---

5. Sea el siguiente espacio-tiempo dado por la métrica de Schwarzschild:

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\mathrm{d}t^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega_2^2\,,$$

con $\mathrm{d}\Omega_2^2 \equiv \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2$.

- Calcular el vector normal n^μ del horizonte de sucesos de un agujero negro tipo Schwarzchild de masa M. Comprobar que es un vector nulo.
- Expresar los vectores de la base ortonormal asociada $\{\boldsymbol{e}_{\hat{t}}, \boldsymbol{e}_{\hat{r}}, \boldsymbol{e}_{\hat{\theta}}, \boldsymbol{e}_{\hat{\phi}}\}$ en función de los de la base coordenada $\{\boldsymbol{e}_t, \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\phi\}$.
- Conociendo que $R^t{}_{rtr} = -2M/(r^2(2M-r))$ y que $R^\theta{}_{\phi\phi\theta} = -2M\sin^2(\theta)/r$. Calcular: $R_{rt}{}^{tr}$, $R^\theta{}_\phi{}^{\phi\theta}$, $R_{\hat{t}}{}^{\hat{r}}{}_{\hat{r}\hat{t}}$ y $R_{\hat{\theta}\hat{\phi}}{}^{\hat{\phi}\hat{\theta}}$.
- Encontrar las trayectorias $t(r)$ que siguen los rayos de luz radiales (hacia afuera y con $r > 2M$).

(2 puntos)
