GRAVITACIÓN Y COSMOLOGÍA.
Examen Convocatoria de Mayo [1/6/2018]

---

1. Describir brevemente y asignar tiempos, *redshifts*, $a(t_0)/a(t)$ y temperaturas (fotones y neutrinos) a cinco eventos en la historia del universo desde que la temperatura fue de $T = 5$ MeV hasta hoy.
(2 puntos)

---

2. Deducir una integral (análoga a la que obtuvimos en clase para la edad del universo, en función de H_0 y las diferentes Ω's) para la distancia *propia* al horizonte visible. ¿Cuál será esta distancia propia hoy (en años-luz)? Asumir $h = 0.68$, $\Omega_M = 0.31$, $\Omega_\Lambda = 0.69$ y $\Omega_R = 0$.
Ayuda. Modificar el Notebook de Mathematica para evaluar numéricamente esta integral.
(2 puntos)

---

3. Calcular el tiempo necesario para que la temperatura del Universo (temperatura de los fotones) pase de:

1. $T_i = 7 \times 10^{14}$ K a $T_f = 10^{14}$ K.
2. $T_i = 5 \times 10^{2}$ K a $T_f = 5$ K.

Justificar la respuesta.
Nota. $T_{\gamma,0} = 2.725$ K, $h = 0.68$, $\Omega_V = 0.69$, $\Omega_M = 0.31$ y $\Omega_R = 0$.
$m_{\rm top} = 172$ GeV/c^2, $m_{\rm Higgs} = 126$ GeV/c^2, $m_{\rm Z^0} = 91$ GeV/c^2, $m_{\rm W^\pm} = 80$ GeV/c^2, $m_{\rm bottom} = 4.2$ GeV/c^2 y $m_\tau = 1.8$ GeV/c^2.
(1 punto)

---

4. Considérese el siguiente espacio-tiempo de de Sitter (1+1):

$$ds^2 = -du^2 + \cosh^2 u \; d\phi^2 \,,$$

con $-\infty < u < \infty$ y $0 \leq \phi < 2\pi$.

Calcular:

- Las ecuaciones de las geodésicas y los símbolos de Christoffel (mediante el método lagrangiano).
- Un vector de Killing y su cantidad conservada asociada.
- Calcular $R_{\phi u u \phi}$.
- Los elementos de la base ortonormal $\boldsymbol{e}_{\hat{u}}$ y $\boldsymbol{e}_{\hat{\phi}}$ en función de $\boldsymbol{e}_u$ y $\boldsymbol{e}_\phi$.
- $R^{\hat{u}}{}_{\hat{\phi}\hat{\phi}\hat{u}}$ y $R_{\hat{u}\hat{\phi}}{}^{\hat{u}\hat{\phi}}$.
- ¿Es plano este espacio?

(3 puntos)

---

5. Consideremos una distribución de materia que produce un campo gravitatorio estático con simetría esférica, de forma que en unas ciertas coordenadas (t, r, θ, ϕ) la métrica se escribe como:

$$ds^2 = -f_1(r)dt^2 + f_2(r)dr^2 + r^2 d\Omega_2^2 \,,$$

donde

$$d\Omega_2^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 \,,$$

$$-\infty < t < \infty, \qquad 0 \leq r < \infty, \qquad 0 \leq \theta < \pi, \qquad 0 \leq \phi < 2\pi \,.$$

En estas coordenadas el tensor de energía-momento está dado por

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu} \,,$$

con $u_\mu = (-\sqrt{f_1(r)}, 0, 0, 0)$ y p y ρ escalares que pueden depender de las cuatro coordenadas.

- Imponiendo que $T^{\mu\nu}$ es conservado, encontrar las ecuaciones diferenciales que satisfacen ρ y p.
- ¿Podrías dar una interpretación física de u^μ y justificar su expresión matemática?

Nota: Las funciones $f_1(r)$ y $f_2(r)$ no son las de la solución de Schwarzschild ya que no estamos en el vacío (hay un tensor $T^{\mu\nu}$).

(2 puntos)
