GRAVITACIÓN Y COSMOLOGÍA.
Examen Convocatoria de Mayo [2/6/2016]

---

1. Describir brevemente y asignar tiempos, temperaturas (fotones y neutrinos), *redshifts* y $a(t)/a(t_0)$ a los siguientes eventos en la historia del universo:

- Equilibrio materia-constante cosmológica.
- Recombinación.
- Equilibrio radiación-materia.

(2 puntos)

---

2. Supongamos que los astrónomos calculan la edad de una galaxia con *redshift* $z = 2.5$. ¿Cuál debería ser la edad de esta galaxia (cuando emitió la luz) para eliminar la hipótesis $\Omega_M = 1$ con $\Omega_\Lambda = \Omega_R = 0$? Úsese $h = 0.7$.
(1.5 puntos)

---

3. Cuando los piones se aniquilaron por debajo de una temperatura de 140 MeV, las partículas remanentes aumentaron su temperatura. Calcular este incremento de temperatura. Además, calcular el tiempo que necesitó el Universo, desde el Big Bang, en alcanzar $T = 160$ MeV.
(1.5 puntos)

---

4. Demostrar que la corriente $J^\mu \equiv T^{\mu\nu}\xi_\nu$ es conservada ($\nabla_\mu J^\mu = 0$) si $T^{\mu\nu}$ es el tensor simétrico de energía-momento y ξ_ν es un vector de Killing.
(1.5 puntos)

---

5. Consideremos dos vectores definidos sobre la esfera, W_ρ y U^ρ, donde $\rho = \{\theta, \phi\}$. Calcular $\nabla_\nu W_\rho$ y $\nabla_\nu U^\rho$ explícitamente. Como comprobación, verificar que $(\nabla_\nu W_\rho)U^\rho + W_\rho(\nabla_\nu U^\rho) = \partial_\nu(W_\rho U^\rho)$.
(1.5 puntos)

---

6. La métrica de Reissner-Nordstrøm

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \,,$$

es una solución a las ecuaciones de Einstein con $\Lambda = 0$ y el tensor de energía-momento producido por un campo electromagnético. Describe el campo graviatatorio de una estrella cargada con simetría esférica o un agujero negro estático cargado. En unidades adecuadas los parámetros M y Q son proporcionales a la masa y la carga de la estrella o agujero negro. En lo que sigue supondremos que $M^2 > Q^2$ ¿Por qué?

- Demuéstrese que una partícula masiva sin carga que cae radialmente no puede alcanzar $r = 0$. Compárese esta situación con lo que sucede en la métrica de Schwarzschild.

- Determínese la coordenada radial, $r_{\min}$ de máximo acercamiento para una partícula masiva sin carga que inicialmente se encuentra en reposo en el infinito. Pruébese que $r_{\min} < r_-$, donde r_- es la menor raiz de la ecuación:

$$1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} = 0 \,.$$

(2 puntos)
