PROBLEMAS ADICIONALES. ELECTROMAGNETISMO II. Curso 2025/2026

1. Un disco delgado de radio R, espesor h y conductividad σ se somete a un campo magnético lentamente variable de la forma $B(t) = B_0 \sin(\omega t)$ perpendicular al mismo. ¿Cuál es el valor medio temporal de la potencia disipada por el disco?

2. Calcular el campo magnético B en el interior de un condensador plano de placas circulares cuando éstas se separan lentamente con velocidad constante v permaneciendo conectadas a la diferencia de potencial. Repetir los cálculos considerando el condensador aislado.

3. Sea un condensador plano de placas paralelas circulares de radio R y separación h. Si el medio entre las placas es el vacío y aplicamos una fuerza electromotriz alterna a alta frecuencia a sus electrodos de forma que el voltaje entre los centros de las placas sea $V(t) = V_0 \sin(\omega t)$, calcular los campos eléctricos y magnéticos en el interior del condensador despreciando los efectos de los bordes.

4. Mostrar que el vector $\boldsymbol{P} = V\boldsymbol{J}$, donde V es el potencial eléctrico y $\boldsymbol{J}$ es la densidad de corriente, es físicamente equivalente al vector de Poynting para problemas en los que ninguna magnitud depende del tiempo.

5. Consideremos el entrehierro de un electroimán en el que existe un campo magnético $\boldsymbol{B} = B\hat{\boldsymbol{x}}$. Mediante un condensador plano se establece en la misma región un campo eléctrico perpendicular a $\boldsymbol{B}$ de forma $\boldsymbol{E} = E\hat{\boldsymbol{z}}$. Suponiendo el vacío y que ambos campos son uniformes e independientes del tiempo, calcular el vector de Poynting y comentar el resultado.

6. Sea un largo cable coaxial formado por dos tubos conductores huecos de radios a y b. Se conectan en sus extremos un generador V y una resistencia de forma que se establece una corriente I. Calcular el momento electromagnético y discutir el resultado.

7. Sea un solenoide cilíndrico, de radio a y longitud ilimitada, sobre el cuál se ha dispuesto un bobinado uniformemente distribuido de n espiras muy apretadas por unidad de longitud por el que se hace circular una intensidad de corriente estacionaria I. Se coloca también una densidad de carga uniforme λ a lo largo del eje del solenoide. Calcular el momento electromagnético lineal asociado a esta distribución de fuentes.

8. Sea un condensador plano de placas circulares de radio a y separación l que se carga hasta una diferencia de potencial V mediante una batería. Mostrar, con ayuda del teorema de Poynting, que la energía almacenada se corresponde con la expresión $1/2CV^2$, siendo $C = \epsilon_0 \pi a^2/l$ la capacidad del condensador.

9. Considera una esfera conductora de radio R, centrada en el origen, que está siendo cargada por una corriente con intensidad constante I que fluye hacia arriba a lo largo del eje z hasta el polo sur de la citada esfera. La carga se distribuye de manera uniforme sobre la superficie de la esfera. En el tiempo t, la carga total en la superficie de la esfera es $q(t) = It$. Para un punto exterior a la esfera con coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) calcula

   - El campo eléctrico.
   - Demuestra que el campo magnetico es

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)\hat{\boldsymbol{\phi}}\,.$$

- El vector de Poynting.
- La densidad de energía de los campos.
- Comprueba que la densidad de energía electromagnética se conserva localmente en el exterior a la esfera excepto en el eje z, ¿por qué?

10. Calcula los valores instantáneos de la densidad de energía, densidad de momento, intensidad y tensor de tensiones asociados a la sigueinte onda plana

$$\tilde{\boldsymbol{E}} = E_0 \exp\left[i(kx - \omega t)\right] \hat{\boldsymbol{y}}\,.$$

11. ¿Cuál es la frecuencia de corte (Hz) para el modo dominante TM en una guía de ondas rellenada con material dieléctrico con $\epsilon_r = 4$? Las dimensiones de la guía son $a = 2b = 5$ cm.

12. Una onda TE se propaga en una guía de onda rellena de un material con permitividad eléctrica desconocida y con $\mu = \mu_0$. Sus dimensiones son $a = 5$ cm y $b = 3$ cm. Si la componente x del campo eléctrico está dada por

$$E_x = -36\cos(40\pi x)\sin(100\pi y)\sin(2.4\pi \times 10^{10} t - 52.9\pi z)\,,$$

medido en V/m. Determina

- Los modos de la onda (TE_{mn}).
- ϵ_r.
- Calcular la velocidad de fase y de grupo.
- B_y.

13. Considera una guía de ondas rellena con material dieléctrico (caracterizado por ϵ_r). Sus dimensiones son $a = b = 10$ cm y la frecuencia de corte para el modo dominate TM es de $f = 7.07 \times 10^8$ Hz.

- Caracterizar el modo dominante de la onda TM.
- Calcular ϵ_r.

14. Calcular la potencia radiada, en la aproximaxión de onda larga, por una partícula de carga q y masa m sometida a una fuerza elástica con constante recuperadora k y fricción lineal con la velocidad, cuando se le aplica un campo eléctrico $E = E_0\cos(\omega t)$ en la dirección de su movimiento, siendo $\omega^2 \neq k/m$. Ayuda: Obviar el régimen transitorio.

15. Considera una onda plana que se propaga en el aire (medio 1) y que incide en un medio dieléctrico con permitividad $\epsilon_r = 4$ (medio 2). La superficie de discontinuidad entre los dos medios está definida por el plano $z = 0$.

El campo eléctrico (en V/m) de la onda incidente está dado por la ecuación:

$$\tilde{\boldsymbol{E}} = 100\cos(\pi x + 1.73\pi z - \omega t)\hat{\boldsymbol{y}}\,.$$

Calcula:

- Las polarizaciones de la onda incidente, reflejada y transmitida.
- ω y las longitudes de onda en los dos medios.

- Los ángulos de incidencia, reflexión y transmisión.
- El campo eléctrico total en los medios 1 y 2.
- La densidad promedio de energía y el flujo promedio de energía en el medio 2.

16. Como modelo de radiación cuadrupolar eléctrica consideramos dos dipolos eléctricos oscilantes, separados una distancia d con coordenadas $(d/2, 0, 0)$ y $(-d/2, 0, 0)$ siendo sus dipolos $\boldsymbol{p}_1 = p_0 \cos(\omega t)\hat{\boldsymbol{x}}$ y $\boldsymbol{p}_2 = -p_0 \cos(\omega t)\hat{\boldsymbol{x}}$ respectivamente. Calcular en primer orden en d:
    - El protencial escalar y el potencial vector.
    - Los campos eléctrico y magnético.
    - El vector de Poynting y dibujar $I(\theta)$.

17. Sean dos dipolos eléctricos oscilantes $p_1(t) = p_0 \cos(\omega t)$ y $p_2 = p_0 \cos(\omega t)$ iguales, situados en el origen de coordenadas y formando un ángulo de 45 grados entre si. Calcular la potencia total radiada por los dos dipolos.

18. Comprobar que la solución general de la ecuación de ondas inhomogénea para los pontenciales V y $\boldsymbol{A}$ encontrada en clase satisface el gauge de Lorenz.

19. Sea un anilllo de radio R centrado en el origen de coordenadas y apoyado en el plano xy. Se dispone sobre él una densidad de carga lineal $\lambda = \lambda_0 \sin(\phi)$, donde $0 \leq \phi < 2\pi$ es el ángulo azimutal. El anillo gira con velocidad angular $\boldsymbol{\omega} = \omega\hat{\boldsymbol{z}}$. Calcular la potencia radiada en la aproximación dipolar eléctrica.

20. Comprobar que los potenciales de una carga moviéndose a velocidad constante satisfacen el gauge de Lorenz.

21. Considerando la ecuación $\partial_\beta F^{\alpha\beta} = \mu_0 J^\alpha$ y las propiedades de $F^{\alpha\beta}$, deducir la ecuación de continuidad.

22. Sea la 4-fuerza $f^\mu \equiv \frac{dp^\mu}{d\tau}$, demostrar que
$$f_\mu f^\mu = \gamma^2 \left(1 - \beta^2 \cos^2\theta\right) F^2 \,,$$
con $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$, $\beta = v/c$, $F = |\boldsymbol{F}|$ y siendo θ el ángulo entre $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{F}$.

23. Un cable recto situado a lo largo del eje z lleva una densidad de carga λ moviéndose en la dirección z con velocidad v. Calcular $F^{\mu\nu}$ y $G^{\mu\nu}$ en el punto $(x, 0, 0)$.

24. Probar que el carácter simétrico o antisimétrico de un tensor $C^{\alpha\beta}$ se preseva bajo transformaciones de Lorentz.

25. Calcular el dual del dual del tensor de Faraday.

26. En un cierto sistema de referencia S, $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ no son ni paralelos ni perpendiculares en un punto dado del espacio-tiempo. Demostrar que en un sistema S' moviéndose con velocidad $\boldsymbol{v}$ con respecto a S dado por
$$\frac{\boldsymbol{v}}{1 + \frac{v^2}{c^2}} = \frac{\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}}{B^2 + \frac{E^2}{c^2}} \,,$$
los campos $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ son paralelos en ese punto. ¿Existiría un sistema S'' donde ambos campos fueran perpendiculares?

27. Demuestra que la potencia que irradia una partícula de masa m y carga q en un acelerador lineal es
$$\frac{dE}{dt} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 m^2 c^3}\left(\frac{dK}{dx}\right)^2$$
donde x es la longitud a lo largo del acelerador lineal y K es la energía cinética de la partícula.

28. Demuestra que en un acelerador circular de radio R, una partícula con carga q (velocidad v y con energía cinética $K = E - mc^2$) moviéndose con velocidad angular constante irradia energía a razón de
$$\frac{dE}{dt} = \frac{q^2 c}{6\pi\epsilon_0 R^2}\left(\frac{v}{c}\right)^4\left(\frac{E}{mc^2}\right)^4 .$$

29. Escribe en términos de los cuadrivectores A^μ y J^μ y determina como se transforman bajo una transformación de Lorentz las siguientes ecuaciones:
   - $V^2 - c^2\boldsymbol{A}^2$
   - $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{J} - V\rho$.

30. Sea θ_{max} el ańgulo donde es máxima la radiación emitida por una carga puntual cuya velocidad y aceleración son instantáneamente colineales. Demostrar
$$\theta_{\text{max}} \simeq \sqrt{(1-\beta)/2}\,,$$
donde $\beta = v/c$.

    Ayuda: Consultar en el libro de Griffiths la distribución angular de la emisión de la radiación.