PROBLEMAS ADICIONALES. ELECTROMAGNETISMO II. Curso 2024/2025

1. Un disco delgado de radio R, espesor h y conductividad σ se somete a un campo magnético lentamente variable de la forma $B(t) = B_0 \sin(\omega t)$ perpendicular al mismo. ¿Cuál es el valor medio temporal de la potencia disipada por el disco?

2. Calcular el campo magnético B en el interior de un condensador plano de placas circulares cuando éstas se separan lentamente con velocidad constante v permaneciendo conectadas a la diferencia de potencial. Repetir los cálculos considerando el condensador aislado.

3. Sea un condensador plano de placas paralelas circulares de radio R y separación h. Si el medio entre las placas es el vacío y aplicamos una fuerza electromotriz alterna a alta frecuencia a sus electrodos de forma que el voltaje entre los centros de las placas sea $V(t) = V_0 \sin(\omega t)$, calcular los campos eléctricos y magnéticos en el interior del condensador despreciando los efectos de los bordes.

4. Mostrar que el vector $\boldsymbol{P} = V\boldsymbol{J}$, donde V es el potencial eléctrico y $\boldsymbol{J}$ es la densidad de corriente, es físicamente equivalente al vector de Poynting para problemas en los que ninguna magnitud depende del tiempo.

5. Consideremos el entrehierro de un electroimán en el que existe un campo magnético $\boldsymbol{B} = B\hat{\boldsymbol{x}}$. Mediante un condensador plano se establece en la misma región un campo eléctrico perpendicular a $\boldsymbol{B}$ de forma $\boldsymbol{E} = E\hat{\boldsymbol{z}}$. Suponiendo el vacío y que ambos campos son uniformes e independientes del tiempo, calcular el vector de Poynting y comentar el resultado.

6. Sea un largo cable coaxial formado por dos tubos conductores huecos de radios a y b. Se conectan en sus extremos un generador V y una resistencia de forma que se establece una corriente I. Calcular el momento electromagnético y discutir el resultado.

7. Sea un solenoide cilíndrico, de radio a y longitud ilimitada, sobre el cuál se ha dispuesto un bobinado uniformemente distribuido de n espiras muy apretadas por unidad de longitud por el que se hace circular una intensidad de corriente estacionaria I. Se coloca también una densidad de carga uniforme λ a lo largo del eje del solenoide. Calcular el momento electromagnético lineal asociado a esta distribución de fuentes.

8. Sea una densidad de corriente radial, centrada en el origen de coordenadas de la forma: $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) = J(r)\hat{\boldsymbol{r}}$. Calcular $\boldsymbol{B}$ en cualquier punto del espacio.

9. Sea un condensador plano de placas circulares de radio a y separación l que se carga hasta una diferencia de potencial V mediante una batería. Mostrar, con ayuda del teorema de Poynting, que la energía almacenada se corresponde con la expresión $1/2CV^2$, siendo $C = \epsilon_0 \pi a^2/l$ la capacidad del condensador.

10. Una partícula de masa m y carga q oscila bajo una fuerza elástica con constante recuperadora k. Estudiar su movimiento incluyendo la fuerza de reacción a la radiación. Ayuda: Asumir que la fuerza de reacción a la radiciación es pequeña en relación al resto de las fuerzas.

11. Un modelo clásico del átomo de hidrógeno sería inconsistente, ya que la radiación emitida por el electrón al estar acelerado, lo haría caer sobre el protón. Estimar cuanto tiempo duraría el átomo clásico de Bohr del hidrógeno, sabiendo que su radio orbital inicial es el radio de Bohr.

12. Calcular la potencia radiada, en la aproximaxión de onda larga, por una partícula de carga q y masa m sometida a una fuerza elástica con constante recuperadora k y fricción lineal con la velocidad, cuando se le aplica un campo eléctrico $E = E_0 \cos(\omega t)$ en la dirección de su movimiento, siendo $\omega^2 \neq k/m$. Ayuda: Obviar el régimen transitorio.

13. Como modelo de radiación cuadrupolar eléctrica consideramos dos dipolos eléctricos oscilantes, separados una distancia d con coordenadas $(d/2, 0, 0)$ y $(-d/2, 0, 0)$ siendo sus dipolos $\boldsymbol{p}_1 = p_0 \cos(\omega t)\hat{\boldsymbol{x}}$ y $\boldsymbol{p}_2 = -p_0 \cos(\omega t)\hat{\boldsymbol{x}}$ respectivamente. Calcular en primer orden en d:

    - El protencial escalar y el potencial vector.
    - Los campos eléctrico y magnético.
    - El vector de Poynting y dibujar $I(\theta)$.

14. Sean dos dipolos eléctricos oscilantes $p_1(t) = p_0 \cos(\omega t)$ y $p_2 = p_0 \cos(\omega t)$ iguales, situados en el origen de coordenadas y formando un ángulo de 45 grados entre si. Calcular la potencia total radiada por los dos dipolos.

15. Sea un anilllo de radio R centrado en el origen de coordenadas y apoyado en el plano xy. Se dispone sobre él una densidad de carga lineal $\lambda = \lambda_0 \sin(\phi)$, donde $0 \leq \phi < 2\pi$ es el ángulo azimutal. El anillo gira con velocidad angular $\boldsymbol{\omega} = \omega\hat{\boldsymbol{z}}$. Calcular la potencia radiada en la aproximación dipolar eléctrica.

16. Un electrón se libera desde el reposo y cae bajo la influencia de la gravedad, durante el primer milímetro, ¿qué fracción de energía potencial emite?

17. Comprobar que los potenciales de una carga moviéndose a velocidad constante satisfacen el gauge de Lorenz.

18. Considera un condensador con placas planas y paralelas con una separación d, capacidad C y con una carga inicial $\pm Q_0$. Se conecta a una resistencia R y comienza a descargarse, siguiendo la conocida ley $Q(t) = Q_0 \exp/(-t/RC)$.

    - ¿Qué fraccción de la energía inicial $Q_0^2/2C$ se emite en forma de radiación?
    - Si $C = 1$ pF, $R = 1000\ \Omega$ y $d = 0.1$ mm, calcular numéricamente la fracción emitida. Discutir el resultado.

19. Sea $\theta_{\max}$ el angulo donde es máxima la radiación emitida por una carga puntual cuya velocidad y aceleración son instantáneamente colineales. Demostrar

    $$\theta_{\max} \simeq \sqrt{(1-\beta)/2}\,,$$

    donde $\beta = v/c$.

20. Considerando la ecuación $\partial_\beta F^{\alpha\beta} = \mu_0 J^\alpha$ y las propiedades de $F^{\alpha\beta}$, deducir la ecuación de continuidad.

21. Sea la 4-fuerza $f^\mu \equiv \frac{dp^\mu}{d\tau}$, demostrar que

    $$f_\mu f^\mu = \gamma^2 \left(1 - \beta^2 \cos^2\theta\right) F^2\,,$$

    con $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$, $\beta = v/c$, $F = |\boldsymbol{F}|$ y siendo θ el ángulo entre $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{F}$.

22. Un cable recto situado a lo largo del eje z lleva una densidad de carga λ moviéndose en la dirección z con velocidad v. Calcular $F^{\mu\nu}$ y $G^{\mu\nu}$ en el punto $(x, 0, 0)$.

23. Probar que el carácter simétrico o antisimétrico de un tensor $C^{\alpha\beta}$ se preseva bajo transformaciones de Lorentz.

24. Calcular el dual del dual del tensor de Faraday.

25. En un cierto sistema de referencia S, $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ no son ni paralelos ni perpendiculares en un punto dado del espacio-tiempo. Demostrar que en un sistema S' moviéndose con velocidad $\boldsymbol{v}$ con respecto a S dado por

$$\frac{\boldsymbol{v}}{1 + \frac{v^2}{c^2}} = \frac{\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}}{B^2 + \frac{E^2}{c^2}},$$

los campos $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ son paralelos en ese punto. ¿Existiría un sistema S'' donde ambos campos fueran perpendiculares?