PROBLEMAS DE ELECTROMAGNETISMO II. Curso 2024/2025
Tema 1

1. Calcular $\boldsymbol{\nabla}\cdot(r^n\hat{\boldsymbol{r}})$ y $\boldsymbol{\nabla}\times(r^n\hat{\boldsymbol{r}})$, siendo $\boldsymbol{r}$ el vector posición.

2. Estudiar la posibilidad de tener un campo electrostático de intensidad $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}$, siendo $\boldsymbol{a}$ un vector constante.

3. ¿Podría disponerse una distribución de carga en el exterior de cierta región vacía de tal manera que en ella la intensidad del campo electrostático tuviese las siguientes formas?

   (a) $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E_0}$

   (b) $\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{b}$, donde $\boldsymbol{r}$ representa el vector de posición, mientras que $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son vectores constantes.

4. Utilizando la delta de Dirac en las coordenadas apropiadas, expresar las siguientes distribuciones de carga como densidades de carga tridimensional $\rho(\boldsymbol{r})$:

   (a) Una carga Q uniformemente distribuida sobre una capa esférica de radio R.

   (b) Una densidad de carga lineal λ distribuida sobre una superficie cilíndrica de radio b.

   (c) Una carga Q uniformemente distribuida sobre una superficie circular de radio R y espesor despreciable.

5. Demostrar la siguiente propiedad del símbolo completamente antisimétrico:

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn}=\begin{vmatrix}\delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in}\\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn}\\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn}\end{vmatrix}=\delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn}-\delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km}+\delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl}-\delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn}+\delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km}-\delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl}.$$

   Usando esta propiedad demostrar:

   - $\sum_i \epsilon_{ijk}\epsilon_{imn}=\delta_{jm}\delta_{kn}-\delta_{jn}\delta_{km}$.
   - $\sum_{i,j} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijn}=2\delta_{kn}$.
   - $\sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk}=3!$.

6. Demostrar usando notación tensorial

$$\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B})+\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{B}+(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{A}\,.$$

7. Demuéstrese que:

$$\frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{3}\left.\frac{\partial^2 d(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r'})}{\partial x'_i\partial x'_j}\right|_{\boldsymbol{r'}=0} x'_i x'_j=\frac{1}{2r^5}\sum_{i,j=1}^{3}\left[3x'_ix'_j-(r')^2\delta_{ij}\right]x_ix_j, \tag{1}$$

   siendo $d(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r'})=\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|}$.

8. Calcular el valor del campo magnético producido por una distribución volumétrica de carga con simetría esférica, variable con el tiempo y con la carga neta Q.

9. Dos placas conductoras perfectas, paralelas, de anchura a, longitud l y situadas a una distancia d llevan corrientes de igual valor y signo contrario. El espesor de las placas es muy pequeño y las densidades de corriente pueden considerarse laminares. Su expresión es:

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) = \pm J_0 \cos(\omega t)\hat{\boldsymbol{y}} \quad \text{A/m}. \tag{2}$$

Determínese, razonando la respuesta, cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas y cuáles no:

(a) Aparecerá un campo magnético en el espacio que rodea las placas porque las corrientes varían en el tiempo.

(b) Ese campo magnético será también variable en el tiempo.

(c) En cada placa debe existir un campo eléctrico tangencial, proporcional al valor de la corriente.

(d) El campo magnético rodeará a cada placa.

(e) Pero entre ambas placas el campo magnético tiende a cancelarse.

(f) Debe existir además un campo eléctrico entre ambas placas, que invierte su signo en cada semiperíodo de variación temporal de la corriente.

(g) Si la frecuencia se hace cero, desaparecerá el campo magnético.

(h) Si la frecuencia se hace cero, desaparecerá el campo eléctrico.

10. Un condensador de placas paralelas circulares de radio a en el vacío se conecta a una fuente de tensión que suministra un potencial V. La separación entre las placas oscila lentamente de acuerdo a la expresión

$$l(t) = l_0(2 + \sin \omega t).$$

Calcular el vector de Poynting e interpretar el resultado. Repetir los cálculos para el condensador cargado y aislado de la fuente. Justificar por qué se impone la condición de oscilación lenta en la distancia entre placas.

11. Sea un condensador esférico entre cuyos electrodos (de radios a y b) se introduce un dieléctrico no homogéneo de permitividad $\varepsilon(r) = \varepsilon_0 b^2/r^2$, siendo r la distancia al centro del condensador. Demostrar que su capacidad corresponde a la de un condensador plano de superficie $4\pi b^2$ y separación entre placas $b-a$ en el vacío. Si el medio entre electrodos presenta una conductividad de la forma $\sigma(r) = \sigma_0/r^2$, obtener el tiempo de relajación del sistema y calcular la potencia disipada cuando la diferencia de potencial aplicada es V.

12. Sea una línea recta indefinida con densidad de carga uniforme λ situada a lo largo del eje z. Calcular, mediante el tensor de Maxwell, la fuerza que experimenta por unidad de longitud cuando se somete a un campo electrostático uniforme y perpendicular a ella de la forma $\boldsymbol{E}_0 = E_0\hat{\boldsymbol{y}}$.

13. Sea una esfera conductora de radio a y carga Q en la que se efectúa un corte a través de un plano que pasa por su centro, manteniendo contacto ambos hemisferios. Calcular mediante el tensor de Maxwell la fuerza de interacción entre los dos hemisferios.