ELECTROMAGNETISMO II.
Examen Convocatoria de junio [1/6/2026]

---

1. Sea una onda plana con $\tilde{\boldsymbol{E}} = E_0(\hat{\boldsymbol{y}} - \hat{\boldsymbol{z}}\mathrm{i}) \exp\left[\mathrm{i}(kx - \omega t)\right]$. ¿Cuál sería su polarización?
(0.75 puntos)

---

2. La enana roja Proxima Centauri, que es la estrella más cercana al Sol, emite radiación electromagnética (en todo el espectro) con una potencia total de aproximadamente 6×10^{23} W, que se emite de manera isótropa. Calcula para un punto situado en la órbita de su exoplaneta Proxima Centauri b (que asumiremos circular con un radio de aproximadamente 7.26×10^6 km):

1. El valor del módulo de Poynting promedio.
2. El módulo de las amplitudes de los campos eléctrico y magnético.
3. Densidad promedio del momento electromagnético.

Nota: Asumir que la radiación llega al punto de observación en forma de onda plana.
(0.75 puntos)

---

3. Para una guía de ondas cuadrada, $a = b$, en el modo TM_{11}, calcula los cocientes $\tilde{E}_x/\tilde{E}_y$ y $\tilde{B}_x/\tilde{B}_y$.
(2 puntos)

---

4. Una onda plana se propaga en el mar. La superficie del mar está justo por encima del plano XY. La dirección de propagación de la onda define el eje Z (alejándose de la superficie del mar). Los parámetros del agua salada son: $\epsilon_r = 80$, $\mu_r = 1$ y $\sigma = 4$ S/m. El campo magnético en el plano $z = 0$ (justo por debajo de la superficie del mar) está dado por:

$$\boldsymbol{H}(0,t) = 100 \cos\left(2\pi \times 10^3 t + \frac{\pi}{12}\right) \hat{\boldsymbol{y}} \quad (\mathrm{mA/m}) \ .$$

- Obtén las expresiones para $\boldsymbol{E}(z,t)$ y $\boldsymbol{H}(z,t)$.
- Determina la profundidad a la cuál el valor de $|\boldsymbol{E}|$ es el $1\,\%$ de su valor a $z = 0$.

(2.5 puntos)

---

5. Considera una partícula *no relativista* con carga q moviéndose a lo largo del eje Z con posición instantánea

$$z(t) = z_0 \cos(\omega t)\,.$$

Usando los campos de Liénard-Wiechert, calcula:

1. El campo eléctrico y magnético en la zona de radiación (campo lejano).
2. El vector de Poynting en la zona de radiación.
3. La potencia emitida, en forma de radiación, por unidad de ángulo sólido $\mathrm{d}P/\mathrm{d}\Omega$.
4. La potencia total emitida $P(t)$ en forma de radiación.

Nota. Los vectores $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{S}$ se tienen que expresar en la base esférica: $\hat{\boldsymbol{r}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, $\hat{\boldsymbol{\phi}}$.

(2.5 puntos)

---

6. Considera el espacio de Minkowski $\mathbb{M}^{1,3}$ con signatura $(-1,1,1,1)$. El tensor de energía-momento del campo electromagnético se puede escribir como

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{\mu_0}\left(\eta_{\rho\sigma}F^{\alpha\rho}F^{\beta\sigma} - \frac{1}{4}\eta^{\alpha\beta}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}\right),$$

donde $F_{\mu\nu}$ es el tensor de Faraday.

1. Demuestra que $T^{\alpha\beta}$ es un tensor simétrico.
2. Calcula su traza, $T^{\alpha}_{\ \alpha}$.
3. Calcula T^{00}. A la vista del resultado da una interpretación física del mismo.

(1.5 puntos)

- En la notación del libro de Griffiths, el campo eléctrico y campo magnético de una partícula cargada siguiendo una trayectoria $\boldsymbol{w}(t)$ están dados por (a partir de los potenciales de Liénard-Wiechert):

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathscr{r}}{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\mathscr{r}})^3}\left[(c^2-v^2)\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\mathscr{r}}\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{a})\right]$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{c}\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$$

  con $\boldsymbol{\mathscr{r}} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{u} = c\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}} - \boldsymbol{v}$, $c(t-t_r) = \mathscr{r}$, $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{w}}$ y $\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}}$.

  Recordad que $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{\mathscr{r}}$, $\mathscr{r}$ se evalúan en t_r.

- Tensor de Faraday

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

- $\hat{\boldsymbol{z}} = \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{r}} - \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$. $\mathrm{d}\boldsymbol{a} = r^2\mathrm{d}\Omega\,\boldsymbol{n}$. $\mathrm{d}\Omega = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$.