ELECTROMAGNETISMO II.
Examen Convocatoria de Mayo [21/5/2025]

1. Considera una esfera conductora de radio R , centrada en el origen, que está siendo cargada por una corriente con intensidad constante I que fluye hacia arriba a lo largo del eje z hasta el polo sur de la citada esfera. La carga se distribuye de manera uniforme sobre la superficie de la esfera. En el tiempo t , la carga total en la superficie de la esfera es $q(t) = It$. Para un punto exterior a la esfera con coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) calcula

- El campo eléctrico. (0.25 puntos)
- Demuestra que el campo magnetico es

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \left(\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \right) \hat{\phi}.$$

(1 punto)

- El vector de Poynting. (0.25 puntos)
- La densidad de energía de los campos. (0.25 puntos)
- Comprueba que la densidad de energía electromagnética se conserva localmente en el exterior a la esfera excepto en el eje z , ¿por qué? (0.75 puntos)

(2.5 puntos)

2. Una onda TE se propaga en una guía de onda rellena de un material con permitividad eléctrica desconocida y con $\mu = \mu_0$. Sus dimensiones son $a = 5$ cm y $b = 3$ cm. Si la componente x del campo eléctrico está dada por

$$E_x = -36 \cos(40\pi x) \sin(100\pi y) \sin(2.4\pi \times 10^{10}t - 52.9\pi z),$$

medido en V/m. Determina

- Los modos de la onda (TE_{mn}). (0.5 puntos)
- ϵ_r . (0.5 puntos)
- Calcular la velocidad de fase y de grupo. (0.5 puntos)
- B_y . (0.5 puntos)

(2 puntos)

3. Considera la siguiente generalización relativista de la fuerza de Abraham-Lorentz

$$f^\alpha = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \ddot{u}^\alpha, \quad (1)$$

donde q es la carga de la partícula, u^α es la cuadrivelocidad y f^α es la cuadrifuerza.

- Demuestra que para una f^α general (no necesariamente la generalización propuesta en la Ec. (1)) se verifica que

$$f^\alpha u_\alpha = 0. \quad (2)$$

(0.5 puntos)

- ¿La 4-fuerza dada por la Ec.(1) verifica la condición (2)?

(1 punto)

- Si no es así, ¿qué término añadirías a la generalización de la fuerza de Abraham-Lorentz para que se satisfaga la condición (2)?

(0.5 puntos)

(2 puntos)

4. Demuestra que la potencia que irradia una partícula de masa m y carga q en un acelerador lineal es

$$\frac{dE}{dt} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 m^2 c^3} \left(\frac{dK}{dx} \right)^2$$

donde x es la longitud a lo largo del acelerador lineal y K es la energía cinética de la partícula.

(2 puntos)

5. Un sistema de cargas oscilantes concentradas alrededor de un punto, irradia con una potencia promedio de 10^4 W. Suponiendo que la energía se irradia de manera isótropa, calcula para un punto situado a una distancia de 1 m de las cargas

- El valor del módulo del vector de Poynting promedio. (0.5 puntos)
- El módulo de las amplitudes de los campos eléctricos y magnéticos. (0.5 puntos)
- La densidad promedio del momento electromagnético. (0.5 puntos)

Asumid que a una distancia de 1 m de las cargas, la radiación electromagnética se comporta como una onda electromagnética plana.

(1.5 puntos)

Nota: Siempre que se tenga que calcular el valor de una cantidad física, problemas 2 y 5, hay que calcularla numéricamente y expresarla con sus unidades en el SI.

ELECTROMAGNETISMO II.

Examen Convocatoria de Mayo [21/5/2025]

Algunas fórmulas útiles:

- Divergencia del vector $\mathbf{V}$ en coordenadas polares:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 V_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta V_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\phi (V_\phi)$$

- $u_\alpha u^\alpha = -c^2$.

- Fórmula de Liénard-Larmor:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{q^2 \gamma^6}{6\pi \epsilon_0 c^3} (a^2 - (\mathbf{v} \times \mathbf{a})^2 / c^2) .$$