FÍSICA CUÁNTICA I | **Grado en Física, UEx**
Curso 2020-2021

Examen Final

25 de Junio de 2021

1. Halla el radio de la estrella Proxima Centauri, asumiendo que emite como un cuerpo negro, a partir de los siguientes datos: el flujo de la luz procedente de esta estrella que llega hasta nosotros es de 3.2×10^{-11} W/m^2, se encuentra a una distancia de 4.246 años-luz y la temperatura de su superficie es de 3000 K.

   Ayuda: Constante de Stefan Boltzmann: $\sigma = 5.67 \times 10^{-8}$ W/(m^2 K^4).

   (2 puntos)

2. Considera un potencial $V(x) = kx^4$

   - Estima usando el principio de incertidumbre la energía del estado fundamental. (0.75 puntos)
   - Discute la estructura del espectro de este potencial. (0.25 puntos)
   - Usando las reglas de cuantización de Wilson-Sommerfeld calcula la energía de los estados ligados. (1 punto)
   - Calcula la densidad de probabilidad normalizada clásica, $P(x, E)dx$, de encontrar a la partícula con energía E en el intervalo $(x, x + dx)$. (0.75 puntos)
   - ¿Bajo qué condiciones la densidad de probabilidad clásica se aproximará a la exacta (cuántica)? (0.25 puntos) Ayuda:

   $$\int_0^1 du\ \sqrt{1 - u^4} = \frac{\sqrt{\pi}\ \Gamma(1/4)}{8\ \Gamma(7/4)}\,.$$

   $$\int_0^1 du\ 1/\sqrt{1 - u^4} = \frac{\sqrt{\pi}\ \Gamma(5/4)}{\Gamma(3/4)}\,.$$

   (3 puntos)

3. Sea el potencial

   $$U(x) = \begin{cases} V_1\,, & x < -b \\ 0\,, & -b < x < a \\ V_2\,, & x > a\,, \end{cases}$$

   con $0 < V_1 < V_2$, $a > 0$ y $b > 0$.

   - Describir de manera cualitativa el espectro de este potencial. (0.5 puntos)
   - Determina la condición de cuantización (ecuación trascendente) que deben de verificar las energías de los estados ligados. (1 punto)
   - Dibuja cualitativamente la función de onda del estado fundamental. Justifica la respuesta. (0.5 punto)

   (2 puntos)

4. Sea una partícula de masa m sometida al potencial armónico

   $$V(x) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\,.$$

   Definamos $\alpha \equiv \sqrt{m\omega/\hbar}$.

   Considera la siguiente superposición a $t = 0$.

   $$\psi(x, 0) = A\,(i\phi_0(x) + 2\phi_1(x))$$

   donde $\phi_0(x)$ y $\phi_1(x)$ son los dos primeras autofunciones del oscilador armónico.

- Calcula A para que $\psi(x,0)$ esté normalizada. (0.2 puntos)
- Escribe $\psi(x,t)$. ¿Es un estado estacionario? (0.5 puntos)
- Calcula $\langle x\rangle_{\psi(x,t)}$. (0.5 puntos)
- Calcula $\langle p\rangle_{\psi(x,t)}$. (0.5 puntos)
- Calcula el valor medio de la energía. ¿Depende del tiempo? (0.5 puntos)
- ¿Cuáles son los posibles valores de la energía y sus probabilidades? (0.4 puntos)
- Medimos la energía en $t = t_0$ y obtenemos E_1. Escribe $\psi(x,t)$ para $t > t_0$. Si en un $t > t_0$ se vuelve a medir la energía, ¿cuáles son los sus valores de la energía y sus probabilidades? (0.4 puntos)

  (3 puntos)

Ayuda:

$$\int_{-\infty}^{\infty} du\ e^{-u^2} = \sqrt{\pi}\,.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} du\ u^2\ e^{-u^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.$$

$$\phi_0(x) = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} e^{-\alpha^2 x^2/2}\,.$$

$$\phi_1(x) = \left(\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} 2\alpha x e^{-\alpha^2 x^2/2}\,.$$