FÍSICA CUÁNTICA **Grado en Física, UEx**
Curso 2022-2023

Examen Final **12 Enero 2023**

1. **ChatGPT** es un prototipo de chatbot de inteligencia artificial lanzado a finales de 2022 por la compañía `OpenAI`.

   Uno de los problemas de la relación correspondiente al Tema 1 dice: ¿A qué ángulo debe ser dispersado un fotón de 0.20 MeV por un electrón libre para que pierda un 10% de su energía inicial?

   Planteado este problema a **ChatGPT** el 04/01/2023, su respuesta fue la siguiente (excepto por algunos cambios de edición para mayor claridad):

   (a) La energía de un fotón se puede calcular utilizando la ley de Planck: $E = hc/\lambda$, donde E es la energía del fotón, h es la constante de Planck, c es la velocidad de la luz en el vacío y λ es la longitud de onda.

   (b) La energía que pierde un fotón al ser dispersado por un electrón libre se puede calcular utilizando la ley de conservación de la energía: $E_i = E_f + E_e$, donde E_i es la energía inicial del fotón, E_f es la energía final del fotón después de ser dispersado y E_e es la energía que gana el electrón.

   (c) El ángulo de dispersión se puede calcular utilizando la relatividad especial y la ley de conservación del momento: $\cos\theta = (E_i - E_f)/[E_i(1 - v_e^2/c^2)]$, donde θ es el ángulo de dispersión y v_e es la velocidad del electrón.

   (d) Para calcular el ángulo de dispersión para el que un fotón de 0.20 MeV pierde un 10% de su energía inicial al ser dispersado por un electrón libre, primero hay que calcular la energía final del fotón: $E_f = 0.9 \times 0.20$ MeV $=$ 0.18 MeV. Ahora se puede calcular la velocidad del electrón utilizando la ley de conservación de la energía: $E_e =$ 0.20 MeV $-$ 0.18 MeV $=$ 0.02 MeV $\Rightarrow v_e = \sqrt{2E_e/m_e} = \sqrt{2 \times 0.02 \text{ MeV}/(9.11 \times 10^{-31} \text{ kg})} = 4.24 \times 10^7$ m/s.

   (e) Por último, $\cos\theta = (0.20 \text{ MeV} - 0.18 \text{ MeV})/[0.20 \text{ MeV} \times (1 - (4.24 \times 10^7 \text{ m/s})^2/c^2)] = 0.44 \Rightarrow \boxed{\theta = 69^\circ}$.

   (f) Espero que esta respuesta sea de tu agrado. Si tienes más preguntas, no dudes en preguntar.

   Revisa *críticamente* los pasos (1a)–(1e) anteriores, no solo desde el punto de vista conceptual sino también desde el punto de vista de las operaciones numéricas. ¿Es correcta la solución proporcionada por **ChatGPT**? De no serlo, ¿cuál sería la solución correcta?

2. Discute *razonadamente* la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

   (a) La naturaleza ondulatoria de la materia no se observa en nuestra vida cotidiana ordinaria porque la longitud de onda de de Broglie solo se aplica a las partículas subatómicas (como el electrón o el neutrón).

   (b) La longitud de onda de de Broglie de una partícula no puede ser nunca menor que el tamaño de dicha partícula.

   (c) Si, de acuerdo con las relaciones de de Broglie, la longitud de onda y frecuencia de una partícula son λ y ν, respectivamente, entonces la velocidad (más probable) de la partícula es $\lambda\nu$.

   (d) De acuerdo con el principio de complementariedad, la longitud de onda y la frecuencia son aspectos complementarios de una partícula.

   (e) Para estudiar la estructura de un sólido cristalino podemos usar experimentos de difracción tanto de rayos X como de electrones, de protones o de neutrones.

   (f) El valor de la longitud de onda de de Broglie de una partícula no depende del movimiento del sistema de referencia del observador.

   (g) Cuanto menor es la vida media de un átomo excitado, mayor es la incertidumbre en la frecuencia del fotón emitido.

   (h) El principio de incertidumbre de Heisenberg implica que la energía más baja de un oscilador no puede ser cero.

   (i) Si una partícula libre se encuentra muy bien localizada inicialmente, su incertidumbre en posición apenas variará con el tiempo.

3. Sea el potencial

$$V(x) = \begin{cases} U_1\,, & x < -x_2 \\ 0\,, & -x_2 < x < -x_1 \\ U_0\,, & -x_1 < x < 0 \\ \infty\,, & x > 0\,, \end{cases}$$

   con $U_1 > U_0 > 0$ y $x_2 > x_1 > 0$.

(a) Determina un intervalo de energías para el cual el espectro es únicamente puntual (estados ligados). Justifica la respuesta. (0.5 puntos)

(b) Determina la condición de cuantización (ecuación trascendente) que deben de verificar las energías de los estados ligados para $0 < E < U_0$. (1.2 puntos)

(c) Dibuja cualitativamente la función de onda del estado fundamental para una energía $0 < E < U_0$. Justifica la respuesta. (0.8 puntos)

(2.5 puntos)

4. Una partícula está confinada en un pozo cuadrado infinito de anchura L

$$V(x) = \begin{cases} \infty\,, & x < 0 \\ 0\,, & 0 < x < L \\ \infty\,, & x > L\,, \end{cases}$$

con $L > 0$. Las autofunciones normalizadas con sus correspondientes energías son

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,, \qquad E_n = \frac{\pi^2\hbar^2 n^2}{2mL^2}\,, \quad n \in \mathbb{N}\ (n = 1, 2, \ldots).$$

En $t = 0$ el estado de la partícula, no normalizado, es $\psi(x, t = 0) = \sin^2(\pi x/L)$.

- Normaliza la función de onda en $t = 0$. (0.2 puntos)
- Calcula $\psi(x, t)$. ¿Es un estado estacionario? (0.7 puntos)
- Si se mide la energía, ¿qué valores se pueden obtener y con qué probabilidades? (0.3 puntos)
- Calcula:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2\,(4k^2+4k-3)^2}\,.$$

  (0.2 puntos)
- Calcula $\langle x\rangle$ y $\langle p\rangle$ en el estado $\psi(x, t)$. (0.4 puntos)
- En $t = t_0$ se mide la energía en el estado $\psi(x, t)$ obteniéndose el valor $E = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$, ¿cuál será la función de onda normalizada $\psi(x, t)$ para $t > t_0$? (0.3 puntos)
- Calcula $\Delta x \Delta p$ para $t > t_0$ y comparar con el resultado riguroso $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$. (0.3 puntos)
- Si en $t > t_0$ se volviera a medir la energía, ¿qué valores se podrían obtener y con qué probabilidades? (0.1 puntos)

(2.5 puntos)

Datos ($n, m \in \mathbb{N}$).

$$\int_0^1 du\ \sin^4(\pi u) = \frac{3}{8}\,.$$

$$\int_0^1 du\ u^2 \sin^2(n\pi u) = \frac{1}{6} - \frac{1}{4n^2\pi^2}\,.$$

$$\int_0^1 du\ \sin^2(\pi u)\sin(n\pi u) = \begin{cases} \frac{2(-1+(-1)^n)}{\pi n(n^2-4)}\,, & n \neq 2 \\ 0\,, & n = 2\,. \end{cases}$$

$$\int_0^1 du\ u \sin(m\pi u)\sin(n\pi u) = \begin{cases} \frac{2\left(-1+(-1)^{n+m}\right)mn}{\pi^2(m^2-n^2)^2}\,, & n \neq m \\ \frac{1}{4}\,, & n = m\,. \end{cases}$$