FÍSICA CUÁNTICA I **Grado en Física, UEx**
Curso 2021-2022

Examen Final **25 de enero de 2022**

1. Responde breve y razonadamente a las siguientes cuestiones:
   (a) Explica el origen de la llamada "catástrofe ultravioleta".
   (b) Compara las definiciones y dimensiones de la radiancia espectral $R_T(\nu)$, la radiancia total R_T y la densidad de energía espectral $\rho_T(\nu)$.
   (c) En los experimentos sobre el efecto fotoeléctrico se observa que la corriente que circula por el circuito (o, equivalentemente, el número de electrones emitidos por unidad de tiempo) es proporcional a la intensidad de la luz monocromática con que se ilumina el cátodo. ¿Es necesario utilizar la teoría de Einstein para explicar este fenómeno? ¿Por qué?
   (d) ¿Por qué no todos los fotoelectrones son emitidos con la misma energía aunque la luz incidente sea monocromática? ¿Por qué son las medidas sensibles a la naturaleza de la superficie fotoeléctrica?
   (e) ¿Sería el efecto Compton apreciable con luz visible? ¿Por qué?
   (f) ¿Cuál es el principal efecto que produciría sobre el espectro de rayos X una disminución del voltaje en el tubo de rayos X?

2. Supongamos una partícula de masa m sometida a un pozo de potencial unidimensional de la forma $V(x) = V_0\left[e^{(x/a)^2} - 1\right]$, donde V_0 y a son constantes positivas.
   (a) Representa en un diagrama la forma cualitativa de la función $V(x)$ y calcula los puntos de retorno clásicos, $\pm x_0$, correspondientes a una energía total E.
   (b) Aplicando la regla de cuantización de Wilson–Sommerfeld, demuestra que los niveles energéticos E_n ($n = 1, 2, \ldots$) vienen dados por $E_n = V_0(X_n - 1)$, donde X_n es la solución de la ecuación transcendente
   $$\sqrt{X_n \ln X_n}\int_0^1 du\,\sqrt{1 - X_n^{u^2-1}} = n\frac{h}{4a\sqrt{2mV_0}}.$$
   (c) ¿Proporciona la ecuación anterior los niveles energéticos *exactos* correspondientes a este potencial? Si no fuera así, ¿en qué caso serían más fiables los resultados: para n pequeño o para n grande?

3. Consideremos el oscilador armónico con Hamiltoniano
   $$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{P}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{X}^2$$
   y definamos los siguientes operadores
   $$\hat{p} = \frac{1}{\sqrt{m\omega\hbar}}\hat{P}\ ,\ \hat{q} = \hat{X}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,,$$
   $$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{p} + i\hat{q}\right)\ ,\ \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{p} - i\hat{q}\right)\ .$$
   (a) Calcula el conmutador $[\hat{p}, \hat{q}]$.
   (b) Calcula $\hat{H}$ en función de $\hat{p}$ y $\hat{q}$ y también como función de $\hat{a}$ y $\hat{a}^\dagger$.
   (c) Calcular los conmutadores $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]$, $[\hat{a}, \hat{H}]$ y $[\hat{a}^\dagger, \hat{H}]$.

4. La función de onda normalizada de un oscilador armónico en $t = 0$ es
   $$\psi(x, t = 0) = \left(\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}}\right)^{1/2}\left(1 - \sqrt{2}\alpha x\right)e^{-\alpha^2x^2/2}\,.$$

(a) Calcula $\psi(x,t)$. ¿Es un estado estacionario?

(b) Si se mide la energía, ¿qué valores se pueden obtener y con qué probabilidades? Calcula $\langle H\rangle_{\psi(x,t)}$.

(c) Calcula $\langle x\rangle_{\psi(x,t)}$ y mediante el Teorema de Ehrenfest $\langle p\rangle_{\psi(x,t)}$.

(d) Si en $t = t_0 > 0$ se mide la energía en el estado $\psi(x,t)$ obteniéndose el valor E_1, ¿cuál será la función de onda normalizada $\psi(x,t)$ para $t > t_0$?

(e) Si después de la medida del apartado anterior se vuelve a medir la energía, ¿qué valores se pueden obtener y con qué probabilidades? Calcula $\langle H\rangle_{\psi(x,t)}$, $\langle x\rangle_{\psi(x,t)}$ y $\langle p\rangle_{\psi(x,t)}$.

Ayuda:

Definamos $\alpha \equiv \sqrt{m\omega/\hbar}$.

$$\phi_0(x) = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} e^{-\alpha^2x^2/2}\,.$$

$$\phi_1(x) = \left(\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} 2\alpha x\ e^{-\alpha^2x^2/2}\,.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} du\ u^2\ e^{-u^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.$$

5. Supongamos que una partícula incide desde $x = +\infty$ sobre el siguiente potencial:

$$U(x) = \begin{cases} U_2\,, & x < a \\ U_1\,, & a < x < \infty \end{cases}$$

con $U_1 > U_2$.

Calcula los coeficientes de transmisión y de reflexión.