FÍSICA CUÁNTICA I **Grado en Física, UEx**
Curso 2020-2021

Examen Final **12 de Enero de 2021**

1. Si consideramos el Sol como un cuerpo negro a temperatura $T = 6000$ K, calcula el ritmo de disminución de su masa (en kg/año) para dar cuenta de la energía emitida.

   Nota: $R_{\text{Sol}} = 696000$ km.

   (1 punto)

2. Un electrón con velocidad $v = 0.8c$ se aniquila con un positrón en reposo, produciendo dos fotones. El primer fotón se observa moviéndose en una dirección perpendicular al electrón incidente. Calcula la energía de cada uno de los dos fotones (en keV). ¿Cuál será el ángulo (en grados) entre el electrón incidente y el segundo fotón?

   Nota. $m_e = 9.109 \times 10^{-31}$ kg.

   (2 puntos)

3. Sea el potencial

$$U(x) = \begin{cases} U_3\,, & x < 0 \\ U_2\,, & 0 < x < a \\ U_1\,, & x > a\,, \end{cases}$$

   con $U_3 > U_1 > U_2$ y $a > 0$.

   a) Determina un intervalo de energías para el cual el espectro es únicamente puntual (estados ligados). (1 punto)

   b) Determina la condición de cuantización (ecuación trascendente) que deben de verificar las energías de los estados ligados. (1.5 puntos)

   c) Dibuja cualitativamente la función de onda del estado fundamental. Justifica la respuesta. (1 punto)

   (3.5 puntos)

4. Consideremos una partícula de masa m sometida a un potencial armónico $U(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$ siendo $\phi_n(x)$ sus autofunciones con energías $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$ y $n = 0, 1, 2, \ldots$.

   En $t = 0$ el estado de la partícula es

$$\psi(x, t = 0) = \sqrt{2}c\phi_0(x) + \frac{1}{2}c\phi_1(x)\,,$$

   donce c es una constante real y negativa.

   - Calcula c para que la función de onda esté normalizada en $t = 0$. Calcula $\psi(x, t)$. ¿Es un estado estacionario? (0.7 puntos)
   - Si se mide la energía, ¿qué valores se pueden obtener y con qué probabilidades? Calcula $\langle H\rangle_{\psi(x,t)}$. (0.7 puntos)
   - Calcula $\langle x\rangle_{\psi(x,t)}$ y mediante el Teorema de Ehrenfest $\langle p\rangle_{\psi(x,t)}$. (0.7 puntos)
   - Si en $t = t_0 > 0$ se mide la energía en el estado $\psi(x, t)$ obteniéndose el valor E_1, ¿cuál será la función de onda normalizada $\psi(x, t)$ para $t > t_0$? (0.7 puntos)
   - Si después de la medida del apartado anterior se vuelve a medir la energía, ¿qué valores se pueden obtener y con qué probabilidades? Calcula $\langle H\rangle_{\psi(x,t)}$, $\langle x\rangle_{\psi(x,t)}$ y $\langle p\rangle_{\psi(x,t)}$. (0.7 puntos)

Ayuda:

Definamos $\alpha \equiv \sqrt{m\omega/\hbar}$.

$$\phi_0(x) = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} e^{-\alpha^2 x^2/2} \, .$$

$$\phi_1(x) = \left(\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} 2\alpha x \; e^{-\alpha^2 x^2/2} \, .$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} du \; u^2 \; e^{-u^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \, .$$

(3.5 puntos)