FÍSICA CUÁNTICA I **Grado en Física, UEx**
Curso 2019-2020

Examen Final

22 de Enero de 2020

1. Un haz de fotones de alta energía chocan con un blanco y algunos rebotan completamente con electrones que pueden considerarse en reposo.

   - Determina el cambio en la longitud de onda que sufren.
   - Si E es la energía de los fotones incidentes, demuestra que la energía de los fotones que rebotan, E_s, está dada por

   $$E_s = \frac{m_e c^2}{m_e c^2/E + 2} \, .$$

   m_e es la masa del electrón.

   (1.5 puntos)

2. Un haz de neutrones lentos de intensidad $10^8 \mathrm{cm}^{-2}\mathrm{s}^{-1}$ incide sobre una lámina de oro (^{197}Au) de 0.01 mm de espesor y 1 cm^2 de superficie. Algunos neutrones lentos son capturados produciéndose ^{198}Au. ¿Cuántos núcleos de ^{198}Au se producen por segundo?

   Datos $\rho(^{197}\mathrm{Au})$=19.2 g cm^{-3}. Sección eficaz de captura $\sigma = 98 \times 10^{-24}$ cm^2.

   (1.5 puntos)

3. Considera una partícula en un potencial unidimensional en presencia del siguiente potencial complejo, $V(x) \in \mathbb{C}$, dado por

   $$V(x) = f(x)\,(1 + i\xi) \ ,$$

   donde $f(x) \in \mathbb{R}$ y $\xi \in \mathbb{R}$.

   Demostrar que la densidad de probabilidad $\rho = |\psi|^2$ verifica la siguiente ecuación de continuidad modificada:

   $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x} = \frac{2\xi f \rho}{\hbar} \, ,$$

   donde la corriente de probabilidad, J, está dada por su expresión usual

   $$J = \frac{\hbar}{2mi}\left[\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x}\right] \, .$$

   (2 puntos)

4. Sea el potencial

   $$V(x) = \begin{cases} \infty \, , & x < 0 \\ 0 \, , & 0 < x < a \\ V_0 \, , & a < x < b \\ V_1 \, , & x > b \, , \end{cases}$$

   con $V_0 > V_1 > 0$ y $b > a > 0$.

   a) Determina un intervalo de energías para el cual el espectro es únicamente puntual (estados ligados).

   b) Determina la condición de cuantización (ecuación trascendente) que deben de verificar las energías de los estados ligados.

   c) Dibuja cualitativamente la función de onda del estado fundamental. Justifica la respuesta.

   (2.5 puntos)

5. Una partícula está confinada en un pozo cuadrado infinito de anchura L

$$V(x) = \begin{cases} \infty\,, & x < 0 \\ 0\,, & 0 < x < L \\ \infty\,, & x > L\,, \end{cases}$$

con $V_0 > 0$ y $L > 0$. Las autofunciones con sus correspondientes energías son

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,, \qquad E_n = \frac{\pi^2\hbar^2 n^2}{2mL^2}\,, \quad n = 1, 2, \ldots\,.$$

En $t = 0$ el estado de la partícula, no normalizado, es $\psi(x, t = 0) = x(x - L)^2$.

- Normaliza la función de onda en $t = 0$.
- Calcula $\psi(x, t)$. ¿Es un estado estacionario?
- Si se mide la energía, ¿qué valores se pueden obtener y con qué probabilidades?
- Si en $t = t_0$ se mide la energía en el estado $\psi(x, t)$ obteniéndose el valor $E = \frac{2\pi^2\hbar^2}{mL^2}$, ¿cuál será la función de onda normalizada $\psi(x, t)$ para $t > t_0$?

Datos.

$$\int_0^1 du\ u^2(u-1)^4 = \frac{1}{105}\,,$$

$$\int_0^1 du\ u(u-1)^2 \sin(n\pi u) = \frac{2\,(2 + (-1)^n)}{\pi^3 n^3}\,.$$

(2.5 puntos)