FÍSICA CUÁNTICA I **Grado en Física, UEx**

Curso 2018-2019

Examen Final

16 de Enero de 2019

1. (a) Dibuja una figura que muestre la corriente fotoeléctrica (I) medida como función de la diferencia de potencial (V) entre los electrodos emisor y colector para luz de intensidad y frecuencia dadas que incide sobre una superficie de sodio. ¿Cómo cambia la figura si se duplica la intensidad de la luz? ¿Y si se duplica la frecuencia de la luz?

   (b) Supóngase que un fotón de longitud de onda inicial 0.60 Å sufre dos colisiones Compton con dos electrones. En la primera colisión el fotón se desvía 30° y en la segunda colisión se desvía 60°. ¿Cuál es la longitud de onda final del fotón?

   (c) Un "átomo" de positronio (constituido por un electrón y un positrón), inicialmente en reposo, se desintegra produciendo tres fotones: el primer fotón viaja formando un ángulo α con el eje x positivo, el segundo fotón lo hace formando un ángulo $-\beta$, mientras que el tercero se mueve en la dirección $-x$. Determina las frecuencias ν_1, ν_2 y ν_3 de los tres fotones en términos de los ángulos α y β.

2. (a) Consideremos un paquete de ondas (cuántico) de una partícula libre. Define y describe brevemente la física de los siguientes conceptos: relación de dispersión, velocidad de fase y velocidad de grupo.

   (b) Como ilustración del apartado anterior, consideremos la siguiente relación de dispersión

$$\omega(k) = \sqrt{gk \tanh(kh)}\,,$$

   que describe el comportamiento de las olas en el mar, siendo h la profundidad del mar, g la aceleración de la gravedad, ω la frecuencia angular y k el número de ondas.

   - Calcular la velocidad de fase y de grupo para las olas, particularizando para aguas muy profundas ($h \gg \lambda$) y aguas poco profundas ($h \ll \lambda$), donde λ es la longitud de onda de la ola.
   - Usando los resultados anteriores, ¿podrías explicar por qué las olas en mar abierto se mueven más rápido cuando su longitud de onda es mayor, mientras que en la orilla todas las olas llegan con la misma velocidad (independientemente de su longitud de onda)?

   Ayuda: $\tanh(x) \simeq x$ si $x \ll 1$; $\tanh(x) \simeq 1$ si $x \gg 1$; $(\tanh x)' = 1/\cosh^2 x$; $\cosh x = (e^x + e^{-x})/2$.

3. Consideremos el potencial

$$V(x) = \gamma\delta(x) + \begin{cases} \infty, & |x| > a, \\ 0, & |x| < a\,. \end{cases}$$

   (a) ¿Existen puntos donde las correspondientes funciones de onda $\psi(x)$ son discontinuas? ¿Y donde las derivadas $\psi'(x)$ son discontinuas?

   (b) Demuestra que en $x = 0$ la derivada de la función de onda presenta una discontinuidad dada por

$$\psi'(0^+) - \psi'(0^-) = \frac{2m\gamma}{\hbar^2}\psi(0)\,.$$

   (c) Calcular las funciones de onda normalizadas de los estados ligados y la correspondiente ecuación trascendente que satisface la energía para el potencial $V(x)$ anterior.

4. Como es sabido, los autovalores (E_n) y las autofunciones normalizadas (ψ_n) del hamiltoniano unidimensional correspondiente al potencial $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ son

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \quad \psi_n(x) = A_n e^{-m\omega x^2/2\hbar} H_n\left(x\sqrt{m\omega/\hbar}\right), \quad A_n = \frac{(m\omega/\hbar\pi)^{1/4}}{2^{n/2}\sqrt{n!}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

   (a) Teniendo en cuenta eso, escribe los autovalores ($\bar{E}_n$) y las autofunciones normalizadas ($\bar{\psi}_n$) del hamiltoniano unidimensional correspondiente al potencial

$$\bar{V}(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0, \\ \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, & x > 0. \end{cases}$$

   Justifica la respuesta.

(b) Una partícula sometida al potencial $\bar{V}(x)$ se encuentra inicialmente en un estado descrito por la función de onda

$$\Psi(x,0) = c_0\bar{\psi}_0(x) + c_1\bar{\psi}_1(x).$$

i. Escribe la función de onda $\Psi(x,t)$ y la densidad de probabilidad $P(x,t)$ en función del tiempo.

ii. Si se mide la energía en el estado $\Psi(x,t)$, ¿qué valores son posibles y qué probabilidad tiene cada uno de ellos?

iii. Supongamos que el valor medio de la energía en el estado $\Psi(x,t)$ es $3\hbar\omega$. Escribe al menos dos funciones de onda $\Psi(x,t)$ linealmente independientes que sean compatibles con ese valor medio.