FÍSICA CUÁNTICA I (Grado en Física, UEx; Curso 2012/2013)

Examen Final 31 de Enero de 2013

1. Responder *razonadamente* a las siguientes preguntas:

   a) ¿Es posible representar la radiancia espectral del cuerpo negro, $R_T(\nu)$, de modo que todas las curvas correspondientes a distintas temperaturas colapsen en una única curva?

   b) ¿Existe una frecuencia umbral a partir de la cual se presenta el efecto fotoeléctrico? De existir, ¿depende esa frecuencia del material iluminado?

   c) ¿Depende el valor del corrimiento Compton del material iluminado?

   d) ¿Existe una longitud de onda mínima en las experiencias de radiación de frenado? De existir, ¿depende esa longitud del material blanco?

2. *a*) Una partícula de masa m está sometida al potencial

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0, \\ \frac{1}{2} m\omega^2 x^2, & x > 0. \end{cases}$$

   Describe qué tipo de movimiento describiría la partícula desde un punto de vista clásico. Aplica ahora la regla de cuantización de Wilson–Sommerfeld para obtener los niveles energéticos E_n. ¿Qué valores se obtendrían si se aplica la regla de cuantización modificada? Indica en cada caso las predicciones para la energía del estado fundamental.

   b) Consideremos de nuevo el mismo potencial anterior. Supongamos que se nos dice que $\langle x \rangle = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{\langle x^2 \rangle}$ en el estado fundamental. Teniendo en cuenta eso, utiliza el principio de incertidumbre de Heisenberg para hacer una estimación de la energía del estado fundamental. Compara con los resultados del apartado anterior.

3. Supongamos el potencial

$$V(x) = \gamma \delta(x) + \begin{cases} 0, & x < 0, \\ V_0, & x > 0, \end{cases}$$

   siendo γ y V_0 constantes positivas.

   a) Partiendo de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo, demuestra que la condición de discontinuidad de la derivada de la función de onda en $x = 0$ es

$$\psi'(0^+) - \psi'(0^-) = \frac{2m\gamma}{\hbar^2} \psi(0).$$

   b) Resuelve la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo en el rango de energías $0 < E < V_0$ y calcula los coeficientes de reflexión y transmisión. ¿Es el espectro de energía en ese rango continuo o discreto? ¿Degenerado o no degenerado?

   c) Repite el apartado anterior para el rango $E > V_0$.

4. *a*) Como sabemos, las autofunciones y autovalores del hamiltoniano correspondiente al oscilador armónico $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ son $\psi_n(x) = A_n \exp\left(-m\omega x^2/2\hbar\right) H_n\left(\sqrt{m\omega/\hbar}x\right)$ y $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$, respectivamente, con $n = 0, 1, 2, \ldots$ Por sencillez, a partir de ahora tomaremos unidades tales que $m = 1$, $\omega = 1$ y $\hbar = 1$. Las primeras autofunciones (normalizadas) son

$$\psi_0(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\pi^{1/4}}, \quad \psi_1(x) = \frac{\sqrt{2}e^{-x^2/2}}{\pi^{1/4}}x, \quad \psi_2(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2}\pi^{1/4}}(2x^2 - 1), \quad \psi_3(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}x(2x^2 - 3).$$

Supongamos que la partícula se prepara en un estado inicial

$$\Psi(x, 0) = \frac{C}{\pi^{1/4}}e^{-x^2/2}\left(2 + 3x - 4x^2\right),$$

siendo C una constante.

1) Expresa $\Psi(x, 0)$ como combinación lineal de las autofunciones $\psi_n(x)$ y calcula el valor de C para que $\Psi(x, 0)$ esté normalizada.
2) Escribe en función del tiempo la función de onda $\Psi(x, t)$ y la densidad de probabilidad $P(x, t)$.
3) Si en el instante t se mide la energía, ¿qué valores se pueden obtener y con qué probabilidad? Calcula el valor medio de la energía $\langle H \rangle$.
4) Calcula $\langle x \rangle$y $\langle p_x \rangle$ en función del tiempo. ¿Se verifica el teorema de Ehrenfest?

Propiedades matemáticas útiles: $\int_0^\infty dx\, x^n e^{-x^2} = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2}$, $\Gamma(n+1) = n!$, $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

b) Volvamos de nuevo al potencial del ejercicio 2. Sin necesidad de hacer ningún cálculo explícito, razona cuáles son las autofunciones y los autovalores del hamiltoniano correspondiente. En particular, ¿cuál es la energía del estado fundamental? Compara con los resultados del ejercicio 2.