FÍSICA CUÁNTICA I **(Grado en Física, UEx; Curso 2011/2012)**

Examen Final **17 de Septiembre de 2012**

1. *a*) La mínima energía necesaria para expulsar un electrón de la superficie de una placa de magnesio es de 3,68 eV. Si se ilumina la placa con luz monocromática de frecuencia $4{,}6 \times 10^{14}$ Hz procedente de una fuente puntual de 100 W de potencia situada a una distancia de 50 cm de la placa, ¿qué sucederá? ¿Y si se duplica la potencia de la luz? ¿Y si se duplica la distancia entre la fuente y la placa? ¿Y si se duplica la frecuencia de la luz?

   b) Joseph John (J. J.) and George Paget (G. P.) Thomson, padre e hijo, llevaron a cabo sendos experimentos con haces de electrones. En 1897, J. J. dedujo que los rayos catódicos estaban constituídos por *partículas* (electrones) con un valor bien definido del cociente carga/masa (e/m). Por este logro obtuvo el Premio Nobel de Física en 1906. En 1927, G. P. mostró que los electrones son difractados por los cristales y, por tanto, se comportan como *ondas*. Este descubrimiento le valió el Premio Nobel de Física (compartido con Davisson) en 1937.

   ¿Son compatibles los descubrimientos del padre y del hijo? En los experimentos de J. J. los electrones con energías de 200 eV pasaban a través de un par de placas separadas 2 cm. Explica entonces por qué J. J. no halló evidencias del comportamiento ondulatorio de los electrones. ¿Qué separación hubiera sido necesaria para que se manifestara ese comportamiento ondulatorio?

2. *a*) El objeto de este ejercicio es *estimar* el tamaño R del átomo de H mediante *análisis dimensional.* Puesto que el electrón está sometido a la atracción coulombiana por parte del núcleo, es de esperar que el tamaño R dependa de $e^2/4\pi\epsilon_0$. También debe depender lógicamente de la masa m del electrón. A partir de aquí tomaremos dos puntos de vista:

   1) **Física cuántica no relativista.** En este caso, además de depender de $e^2/4\pi\epsilon_0$ y m, R debe depender de la constante de Planck $\hbar$, es decir,

   $$R = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^x m^y \hbar^z.$$

   Determina los exponentes x, y, z para que la ecuación anterior sea dimensionalmente correcta. Sustituye los valores numéricos de las constantes y expresa R en Å.

   2) **Física clásica relativista.** En este caso, además de depender de $e^2/4\pi\epsilon_0$ y m, R debe depender de la velocidad de la luz c, es decir,

   $$R = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^x m^y c^z.$$

   Determina los exponentes x, y, z para que la ecuación anterior sea dimensionalmente correcta. Sustituye los valores numéricos de las constantes y expresa R en Å.

   Compara los resultados obtenidos por ambos puntos de vista y coméntalos.

   b) El quark "encantado" (*charmed*) tiene una masa aproximada $M = 1{,}3$ GeV$/c^2$ y está confinado en una partícula (por ejemplo, el mesón J/Ψ) de dimensiones lineales del orden de 1 fm. Utilizando el principio de incertidumbre y admitiendo que el quark confinado puede tratarse como una partícula no relativista, haz una estimación de su energía cinética (en MeV). ¿Estaba realmente justificada la aproximación no relativista?

Constantes:

$\hbar c = 1973$ eV Å,
$e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C,
$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9$ N m^2/C^2,
$m = 9{,}11 \times 10^{-31}$ Kg,
$\hbar = 1{,}05 \times 10^{-34}$ J s,
$c = 3 \times 10^8$m/s.

3. *a*) En mecánica cuántica, una partícula *libre* de momento p y energía cinética $E = p^2/2m$ se representa mediante la función de onda

$$\Psi(x,t) = Ae^{i(px-Et)/\hbar}.$$

Comprueba que la función de onda anterior es efectivamente solución de la ecuación de Schrödinger (dependiente del tiempo). ¿Se trata de un estado estacionario? ¿Por qué? ¿Qué forma toma la solución más general de la ecuación de Schrödinger para una partícula libre?

Imaginemos ahora que en un congreso intergaláctico de Física Cuántica descubrimos que los físicos de otro planeta escriben la función de onda de una partícula libre de momento p y energía cinética $E = p^2/2m$ en la forma

$$\Psi(x,t) = Ae^{-i(px-Et)/\hbar}.$$

¿Están haciendo algo mal? ¿Cómo sería la ecuación de Schrödinger (dependiente del tiempo) en ese planeta?

b) Una partícula confinada estrictamente en una región $0 \leq x \leq a$ se encuentra en el instante inicial en el estado

$$\Psi(x,0) = \psi(x) = \begin{cases} Nx(a-x), & 0 \leq x \leq a, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

donde N es una constante.

1) ¿Es el estado anterior un estado estacionario?
2) Calcula $|N|$ para que la función de onda esté normalizada. ¿En qué punto es máxima la densidad de probabilidad?
3) Calcula los valores esperados $\langle x \rangle$ y $\langle p_x \rangle$.
4) Calcula las incertidumbres Δx y Δp_x.
5) Explica qué habría que hacer para obtener la función de onda dependiente del tiempo, $\Psi(x,t)$, a partir del estado inicial anterior.

4. *a*) Describe de modo esquemático los pasos que habría que seguir para calcular los coeficientes de transmisión y de reflexión correspondientes al pozo de la Fig. 1 si las partículas inciden desde la izquierda. ¿Y si la incidencia es desde la derecha? ¿Hay algún intervalo de energías para el cual el espectro es discreto?

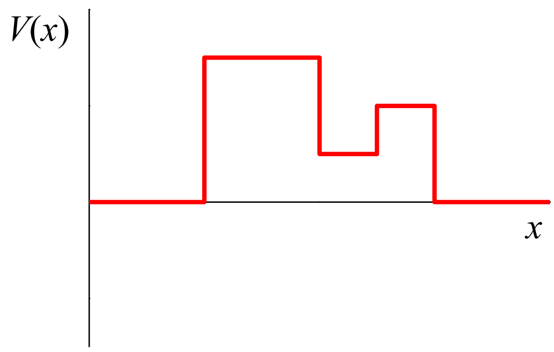

Figura 1: Ejercicio 4*a*.

b) Una partícula sometida a un cierto potencial $V(x)$ se encuentra en un estado estacionario caracterizado por la energía $E = -\hbar^2\alpha^2/2m$ y la función de onda

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x \leq 0, \\ Nxe^{-\alpha x}, & 0 \leq x < \infty, \end{cases}$$

donde N y α son constantes reales y positivas. Obtén el potencial $V(x)$. ¿Corresponde la función de onda anterior $\Psi(x)$ al estado fundamental? ¿A algún estado excitado? ¿Cuál? Haz una figura que muestre de forma cualitativa la forma de la autofunción siguiente a $\psi(x)$.